# **МЕТОД СЕТОК**

## Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

(1)

Краевая задача для уравнения (1) - это задача отыскания решения на отрезке а<х<b, в которой дополнительные условия налагаются на значения функции и ее производных до порядка n-1 более чем одной точке этого отрезка. Очевидно, что краевые задачи возможны для уравнений не ниже второго порядка.

Свое первоначальное название этот тип задач получил по простейшим случаям, когда часть дополнительных условий задается на одном конце отрезка, а другая часть - на другом, т.е. только в точках x=a и x=b.

Для уравнений более высокого порядка, в которых число условий больше двух, постановки краевых условий более разнообразны. При этом возможны случаи, когда часть условий задана во внутренних точках отрезка [a,b], их называют внутренними краевыми условиями.

Если уравнение и краевые условия линейны на относительно функции у(х) и ее производных, то краевая задача называется линейной. Для простоты ограничимся случаем линейной краевой задачи при n=2. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия имеют вид

(2)

(3)

где - заданные постоянные.

В дальнейшем предполагается, что функции Р(х), q(x) и f (x) таковы, что решение краевой задачи (2), (3) существует и единственно.

Найти точное решение краевой задачи в элементарных функциях удается редко: для этого надо найти общее решение уравнения и суметь определить из краевых условий значения входящих в него постоянных. Поэтому возникает необходимость применять те или иные методы, дающие приближенное решение задачи.

## Описание метода

Метод сеток (метод конечных разностей) включает следующие основные этапы:

1. построение сетки, охватывающей рассматриваемую область;
2. построение на полученной сетке конечно-разностной аппроксимации, эквивалентной исходному дифференциальному уравнению и дополнительным условиям;
3. формирование на основе конечно-разностной аппроксимации системы алгебраических уравнений и ее решение.

Основной отрезок [a; b] делим на n равных частей с шагом h = (b – a) / n, т. е. рассматриваем равномерную сетку *xi* = *x*0 + *i h*, i = 0,1, …, n. Производные в исходном уравнении (1) заменяем конечно-разностными отношениями. Для внутренних точек

(3)

где i = 1, ..., n – 1.

Для граничных точек *x*0 = *a* и *xn* = *b*, чтобы не выходить за границы отрезка, производные заменяем отношениями:

(4)

Используя отношения (3) и (4), исходное дифференциальное уравнение (1) аппроксимируем конечно-разностными уравнениями

(5)

Учитывая краевые условия, получим еще два уравнения:

(6)

Выполнив несложные преобразования и объединив системы (5) и (6), получим:

(6)

Таким образом, получена линейная система n+1 уравнений с n+1 неизвестными *y*0, *y*1,..., *yn*, представляющими собой значения искомой функции *y* = *y(x)* в точках *x x*0, 1,...,*xn*. Решив эту систему, получим таблицу значений искомой функции y.

Система (7) является трехдиагональной, т.е. каждое уравнение содержит не более трех соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод, получивший название метода прогонки.

**Метод прогонки.**

После применения метода сеток получили систему следующего вида:

,

где - неизвестные. *yn* можно найти по формуле:

Остальные неизвестные можно найти по рекуррентному соотношению:

где

В приведённых выше обозначениях в прогонке сначала выполняют её прямой ход- вычисляют коэффициенты. После чего вычисляют решение с помощью обратного хода, *yn* , *yk*, *k* = 0, *n*−1.